Sur l'approximation d'une fonction à plusieurs variables.

Par CH. JORDAN à Budapest.

§ 1. Approximation d'une fonction à plusieurs variables indépendantes par la formule de Bravais, selon le principe des moments.

La formule de BRAVAIS[1]) à $s-1$ variables indépendantes est la suivante:

$$(1) \qquad P = Ce^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad \text{où} \quad \chi^2 = 2\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j.$$

Les quantités ε_i sont les écarts entre les variables x_i et certaines grandeurs M_i, divisés par un nombre ω convenablement choisi:

$$(2) \qquad \varepsilon_i = \frac{1}{\omega}(x_i - M_i).$$

Étant donnée une fonction $\bar{P} = \bar{P}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})$ à $s-1$ variables indépendantes, il s'agit d'obtenir une approximation en se servant de la formule de BRAVAIS et en adoptant le principe des moments.

On disposera des paramètres C, M_i et a_{ij} contenus dans la formule (1) de manière que les $\binom{s+1}{2}$ premiers moments de la

---

[1]) Voir C. JORDAN, Problema delle prove ripetute a più variabili indipendenti, *Giornale dell'Istituto degli Attuari*, 1933, p. 350—368; C. JORDAN, Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetute a più variabili, *Giornale dell'Istituto dei Attuari*, 1933, p. 505–513; C. JORDAN, Teoria della perequazione e dell'approssimazione, *Giornale dell'Istituto dei Attuari*, 1934, p. 81—107.

fonction $\bar{P}$ soient identiques aux moments respectifs de la fonction (1) de BRAVAIS.

Lorsqu'on dispose des M_i de manière qu'ils soient égaux aux moments du premier ordre de $\bar{P}$ relatifs aux x_i, alors, à la suite de (2), les moments du premier ordre de $\bar{P}$ par rapport aux ε_i seront nuls.

Il faut donc que les moments correspondants de P soient nuls aussi. On verra plus loin que cette condition est satisfaite.

Nous distinguerons deux cas:

A) Les variables x_i de $\bar{P}$ varient d'une manière *continue*. Dans ce cas il n'y a aucune difficulté. Le moment d'ordre zéro sera

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P} dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Pour simplifier, on suppose $\bar{P}$ multiplié par un facteur convenable pour avoir toujours $M_0 = 1$.

Les moments du premier ordre relatifs aux x_i seront

$$M_i = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \bar{P} dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Les moments du second ordre de P relatifs aux $x_i x_j$ sont

$$M_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j \bar{P} dx_1 \ldots dx_{s-1}.$$

Pour abréger, désignons par μ_{ij} les moments du second ordre de $\bar{P}$ relatifs aux $\varepsilon_i \varepsilon_j$. Comme on a

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \frac{1}{\omega^2} [x_i x_j - x_i M_j - x_j M_i + M_i M_j]$$

on aura

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\omega^2} [M_{ij} - M_i M_j]. \tag{3}$$

Si nous introduisons dans les formules précédentes les variables ε_i (2) au lieu des x_i, nous trouvons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j \bar{P} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1} = \frac{M_{ij}}{\omega^{s-1}}.$$

Maintenant on peut disposer des $\binom{s}{2}$ constantes a_{ij} contenues dans la formule (1) pour satisfaire aux $\binom{s}{2}$ conditions suivantes

$$(4) \qquad \mu_{ij} = \omega^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \varepsilon_j P \, d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1}.$$

Finalement il faut déterminer C de manière à avoir

$$M_0 = \mu_0 = \omega^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P \, d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_{s-1}.$$

B) Lorsque les variables de $\bar{P}$ varient d'une manière discontinue, en prenant des valeurs équidistantes, on peut toujours supposer $\Delta x_i = 1$; alors si x_i varie de 0 à N, les moments de $\bar{P}$ seront

$$M_{ij} = \sum_{x_1=0}^{N} \cdots \sum_{x_{s-1}=0}^{N} x_i x_j \bar{P}.$$

Les moments des écarts $(x_i - M_i)/\omega$ seront donnés par la formule (3). En vue de l'approximation par la formule de BRAVAIS, il faudrait déterminer les constantes figurant dans la formule (1) de manière à avoir

$$\mu_{ij} = \sum_{x_1=0}^{N} \cdots \sum_{x_{s-1}=0}^{N} \varepsilon_i \varepsilon_j P$$

c'est-à-dire au lieu des intégrales (4), il faudrait calculer ces sommes multiples. On pourrait les obtenir en déterminant d'abord les intégrales correspondantes, puis déduire les sommes par une formule de sommation d'EULER à plusieurs variables. Finalement on calculera les constantes a_{ij}. Ce serait un procédé compliqué; mais lorsque les limites des ε_i c'est-à-dire $-M_i/\omega$ et $(N-M_i)/\omega$ sont un peu grandes, l'erreur commise en substituant les intégrales aux sommes est négligeable.

Dans le cas particulier de $s=2$, la formule de BRAVAIS se réduit à celle de LAPLACE.

Exemple. Lorsque P est donnée par la formule de LAPLACE et les constantes sont déterminées à l'aide des intégrales (4) on trouve

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{11}}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}, \quad \text{où} \quad \chi^2 = (x - M_1)^2/\mu_{11},$$

dans ce cas, si x varie de zéro à $n+1$, la formule de sommation d'EULER sera

$$\sum_{x=0}^{n+1} P(x) = \int_0^{n+1} P(x)dx - \frac{1}{2}[P(n+1) - P(0)] +$$

$$+\frac{1}{12}[DP(n+1) - DP(0)] - \frac{1}{720}[D^3P(n+1) - D^3P(0)] + \dots$$

Lorsque $n = 16$, $\mu_{11} = 4$ et $M_1 = 8$, la somme sera égale à 0,9999 8235; d'autre part les termes du second membre seront

$$\begin{array}{rr} + & 0{,}9999\ 6490 \\ + & 2945 \\ - & 1265 \\ + & 70 \\ \hline & 0{,}9999\ 824 \end{array}$$

Le résultat est exact à 7 décimales. Lorsque l'on veut remplacer les limites de l'intégrale par $-\infty$ et ∞, pour obtenir cette précision, il faut que l'on ait $(n+1-M_1)/\sqrt{\mu_{11}}$ et $M_1/\sqrt{\mu_{11}}$ plus grands que 5,3. Lorsque ces quantités sont plus grandes que 5,5 on peut même négliger les termes $P(n+1)$, $P(0)$, $DP(n+1)$ etc.

§ 2. Détermination des constantes a_{ij}, en supposant les erreurs, dues à la substitution des intégrales aux sommes, négligeables.

Remarquons que si i est différent de j, on a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_j \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_{s-1} = 0, \tag{5}$$

en effet, en exécutant d'abord l'intégration par rapport à ε_i on obtient P, qui est nul aux deux limites.

D'autre part, de la formule (1) on déduit

$$\varepsilon_j \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} = -2C \sum_{k=1}^{s-1} a_{ik}\varepsilon_j\varepsilon_k e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

finalement l'intégration donne

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_{ik}\mu_{jk} = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad i \neq j. \tag{6}$$

Deuxièmement considérons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_{s-1}.$$

L'intégration par parties effectuée par rapport à ε_i donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_i = [\varepsilon_i P]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} P d\varepsilon_i.$$

Le premier terme du second membre est égal à zéro aux deux limites, donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_i d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_{s-1} = -\frac{1}{\omega^{s-1}},$$

d'autre part, de (1) il suit

$$\varepsilon_i \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} = -2C \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\varepsilon_i\varepsilon_k e^{-\frac{1}{2}\chi^2}.$$

On en conclut

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_{ik}\mu_{ik} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) fournissent un système d'équations du premier degré à $s-1$ inconnues déterminant les coefficients a_{ik}. On a explicitement

$$\begin{array}{lllll}
a_{i1}\mu_{11} & + \dots + & a_{i,s-1}\mu_{1,s-1} & = & 0 \\
a_{i1}\mu_{21} & + \dots + & a_{i,s-1}\mu_{2,s-1} & = & 0 \\
\dots & \dots & \dots & & \\
a_{i1}\mu_{i1} & + \dots + & a_{i,s-1}\mu_{i,s-1} & = & \frac{1}{2} \\
\dots & \dots & \dots & & \\
a_{i1}\mu_{s-1,1} & + \dots + & a_{i,s-1}\mu_{s-1,s-1} & = & 0.
\end{array}$$

Pour résoudre le système, désignons par $\mathfrak{D}_{s-1}$ le déterminant

$$\mathfrak{D}_{s-1} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1,s-1} \\ \dots & & \dots & \dots \\ \mu_{s-1,1} & \mu_{s-1,2} & \dots & \mu_{s-1,s-1} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant doit être différent de zéro.

Désignons encore par A_{ij} le mineur de $\mathfrak{D}_{s-1}$ correspondant à μ_{ij}. Alors on aura

$$a_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\mathfrak{D}_{s-1}}. \tag{8}$$

Grâce à la symétrie $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ cette formule donne automatiquement $a_{ij} = a_{ji}$.

Les coefficients a_{ij} étant déterminés par la formule (8) en fonction des moments du second ordre μ_{ij}, il reste à montrer que des valeurs a_{ij} obtenues sont telles que les moments du premier ordre s'annulent:

$$\frac{1}{\omega^{s-1}}\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i P\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_{s-1} = 0. \tag{9}$$

A cet effet formons le déterminant réciproque de $\mathfrak{D}_{s-1}$:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{i,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s-1,1} & A_{s-1,2} & \dots & A_{s-1,s-1} \end{vmatrix};$$

à l'aide de (8) on obtient pour ce déterminant la valeur:

$$(2\mathfrak{D}_{s-1})^{s-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \dots & a_{s-1,s-1} \end{vmatrix}.$$

En désignant le dernier déterminant par D_{s-1}, on a en vertu du théorème connu que le déterminant réciproque de $\mathfrak{D}_{s-1}$ est égal à $(\mathfrak{D}_{s-1})^{s-2}$ la relation

$$D_{s-1} = \frac{1}{2^{s-1}\mathfrak{D}_{s-1}}.$$

D'après ce que l'on a vu, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_{s-1} = 0;$$

mais

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} = -2\,(a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + \dots + a_{i,s-1}\varepsilon_{s-1})\,P$$

par suite, en effectuant les intégrations, on trouve pour toutes les valeurs de i

$$a_{i1}\mu_1 + a_{i2} + \dots + a_{i,s-1}\mu_{s-1} = 0$$

ce qui donne, pour $i = 1, 2, \dots, s-1$, les $s-1$ équations déterminant les moments du premier ordre μ_i. Comme le déterminant

$$D_{s-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \dots & a_{s-1,s-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{s-1}\mathfrak{D}_{s-1}}$$

n'est pas égal à zéro, la seule solution des équations précedentes est $\mu_i = 0$. On en conclut que les équations (9) sont satisfaites.

Remarque. Les valeurs de a_{ij} obtenues à l'aide de la formule (8) doivent être des coefficients d'une forme quadratique positive, sans quoi l'intégrale de la fonction P donnée par (1) deviendrait infinie, ce qui est inadmissible.

M. Fejér a appelé l'attention sur le fait que les moments du second ordre d'une fonction positive sont toujours les coefficients d'une forme quadratique positive et qu'il en résulte que les a_{ij} obtenus le sont également. Il le montre ainsi: Considérons μ_{ij} correspondant à la formule (4) où $P \geqq 0$; soient b_{ij} des nombres tels que l'on ait pour toutes les valeurs des ε_i

$$\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} b_{ik} \varepsilon_i \varepsilon_j \geqq 0;$$

de (4) il suit (en multipliant par b_{ij}, intégrant et sommant)

$$\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} \mu_{ij} b_{ij} \geqq 0.$$

Dans le cas particulier de $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j$ on a bien

$$\Sigma \Sigma \varepsilon_i \varepsilon_j \lambda_i \lambda_j = (\Sigma \lambda_i \varepsilon_i)^2 \geqq 0$$

donc

$$\Sigma \Sigma \mu_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqq 0$$

quelles que soient les valeurs de λ_i. Par suite la forme quadratique dont les coefficients sont les nombres μ_{ij} est définie et positive. En posant $\lambda_i = 1$ on trouve l'inégalité

$$\Sigma \Sigma \mu_{ij} \geqq 0.$$

La forme $\Sigma \Sigma \mu_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ étant définie et positive, il en résulte que sa forme polaire $\Sigma \Sigma A_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ l'est aussi. Mais d'après (8) on a $A_{ij} = 2 a_{ij} \mathfrak{D}_{s-1}$; de plus, comme $\mathfrak{D}_{s-1}$ est le discriminant de la forme quadratique $\Sigma \Sigma \mu_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ définie positive, il résulte que $\mathfrak{D}_{s-1}$ est positive. Finalement on conclut que la forme

$$\Sigma \Sigma a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$$

est aussi une forme définie positive. C. Q. F. D.

§ 3. Détermination de la constante C. On peut ramener la forme quadratique figurant dans

$$C e^{-\Sigma \Sigma a_{ik} \varepsilon_i \varepsilon_k}$$

par une transformation orthogonale à $\Sigma\lambda_i X_i^2$, le déterminant fonctionnel de la transformation étant égal à ± 1.

On sait que les coefficients λ_i figurant dans cette transformation sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,s-1} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2,s-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3,s-1} \\ \dots & & & \dots & \dots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \dots & a_{s-1,s-1}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas général, il serait difficile de déterminer ces racines, mais comme on verra plus loin nous n'avons besoin que de connaître le produit des racines, qui est égal au terme constant de l'équation précédente. On l'obtient donc en y écrivant $\lambda = 0$. Donc

$$\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{s-1} = D_{s-1}.$$

Grâce à la transformation mentionnée, on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_{s-1} =$$

$$= C \prod_{i=1}^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i X_i^2} dX_i = C \prod_{i=1}^{s-1} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \frac{1}{\omega^{s-1}}.$$

On en conclut

$$C = \frac{1}{\omega^{s-1}} \sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{s-1}}{\pi^{s-1}}} = \frac{1}{\omega^{s-1}} \sqrt{\frac{D_{s-1}}{\pi^{s-1}}}. \tag{10}$$

La formule (1) se trouve ainsi complètement déterminée.

§ 4. Probabilité des systèmes correspondant à $\chi^2 < \lambda^2$. Lorsque la fonction $\bar{P}$ dont on a obtenu l'approximation par la formule de Bravais représente la probabilité du système de valeurs $x_1, x_0, \dots, x_{s-1}$ ou celle des écarts $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{s-1}$, alors d'après (1), la formule de Bravais fait correspondre à chaque système de variables une certaine valeur de χ^2; et elle montre que les systèmes de variables correspondant à une même valeur de χ^2 sont également probables.

On peut faire correspondre à chaque système un point de l'espace à $s-1$ dimensions (de coordonnées $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{s-1}$). Les points correspondant à des systèmes également probables sont situés sur l'hyperellipsoïde d'égale probabilité

$$2\Sigma\Sigma a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = \chi^2.$$

La formule (1) permet encore de déterminer la probabilité d'un système d'écarts plus probable que celui correspondant à $\chi^2 = \lambda^2$; il suffit de faire la somme des probabilités des systèmes correspondant à $\chi^2 < \lambda^2$. Les points correspondant à ces systèmes sont à l'intérieur de l'hyperellipsoïde

$$2\Sigma\Sigma a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = \lambda^2.$$

Pour déterminer cette probabilité, remarquons que la probabilité pour que le point tombe dans la couche entre les deux ellipsoïdes correspondant à χ et $\chi + d\chi$, est proportionnelle à P donnée par la formule (1), et au volume de la couche. Ce volume est à son tour proportionnel à $\chi^{s-2}d\chi$ car l'une des surfaces se déduit de l'autre par similitude et que l'aire de l'ellipsoïde est proportionnelle à χ^{s-2}. Donc la probabilité en question est

$$\omega_1 \chi^{s-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi$$

et la probabilité totale cherchée sera

$$\mathfrak{P} = \omega_1 \int_0^\lambda \chi^{s-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi.$$

Pour déterminer ω_1, il suffit de remarquer que pour $\lambda = \infty$ on doit avoir $\mathfrak{P} = 1$, par suite

$$\mathfrak{P} = \frac{\int_0^\lambda \chi^{s-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi}{\int_0^\infty \chi^{s-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi}.$$

Introduisons maintenant $t = \frac{1}{2}\chi^2$; on trouve

$$\mathfrak{P} = \frac{\int_0^{1/2\lambda^2} t^{\frac{1}{2}(s-3)} e^{-t} dt}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} = I(\bar{u}, \bar{p}) \tag{11}$$

où

$$\bar{p} = \frac{s-3}{2} \quad \text{et} \quad \bar{u} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{2s-2}}$$

et $I(\bar{u}, \bar{p})$ est la fonction gamma-incomplète (voir par exemple K. Pearson, *Tables of the Incomplete Γ-function*, London, 1922).

La surface correspondante à

$$I(\bar{u}, \bar{p}) = \frac{1}{2}$$

est la surface probable. La probabilité pour que le point correspondant à un système de variables $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{s-1}$ soit à l'intérieur de cette surface est égale à une demie.

Lorsque $p > 0$, l'équation précédente est vérifiée d'une manière approchée par $\bar{u} = \sqrt{p + \frac{1}{2}}$.

En désignant par ϱ le rayon de l'hypersphère probable on aura pour $s > 2$

$$\sqrt{\frac{1}{2}s - 1} = \frac{\varrho^2}{\sqrt{2s-2}} \quad \text{d'ou} \quad \varrho^2 = \sqrt{(s-1)(s-2)}.$$

Par suite l'équation de l'hypersurface est donnée par

$$\chi^2 = \sqrt{(s-1)(s-2)}.$$

Remarque. En posant dans la formule (11) $s = 2$, on obtient celle qui correspond à une variable indépendente. On trouve que la probabilité pour avoir $\chi^2 < \lambda^2$ est

$$\mathfrak{P} = I\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{2}}, \ -\frac{1}{2}\right).$$

Comme dans ce cas, la formule de BRAVAIS se réduit à celle de LAPLACE, on en conclut que les valeurs correspondant à cette formule sont aussi données par les tables de la fonction gamma-incomplète.

§ 5. **Cas particulier remarquable.** Dans plusieurs problèmes de probabilités on trouve que les moments de la fonction positive P des écarts sont de la forme suivante

$$\mu_{ii} = \gamma u_i(1 - u_i) \quad \text{et si} \quad i \neq j, \quad \mu_{ij} = -\gamma u_i u_j \quad (\gamma > 0),$$

comme on a nécessairement $\mu_{ii} > 0$ on doit avoir $0 < u_i < 1$; de plus nous avons vu au § 2 que l'on doit avoir $\Sigma\Sigma\mu_{ij} \geqq 0$. On peut écrire cette somme de la manière suivante

$$\gamma \Sigma\Sigma u_i(1 - u_i - u_j) \geqq 0.$$

Ici dans la sommation relative à j on doit avoir $j \neq i$; on en conclut que la somme précédente est égale à

$$\gamma(1 - u_1 - u_2 - \ldots - u_{s-1}) \Sigma u_i \geqq 0$$

par suite on doit avoir aussi

$$\sum_{i=1}^{s-1} u_i < 1.$$

Dans ce cas, les formules se simplifient considérablement; en effet $\mathfrak{D}_{s-1}$ devient

$$\mathfrak{D}_{s-1}=u_1\dots u_{s-1}\gamma^{s-1}\begin{vmatrix} 1-u_1 & -u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ -u_1 & 1-u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ \dots & & \dots & \dots \\ -u_1 & -u_2 & \dots & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

L'évaluation de ce déterminant est simple. En retranchant de chaque ligne la ligne suivante on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \dots & -u_{s-2} & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

En ajoutant chaque colonne à la dernière on a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \dots & -u_{s-2} & u_s \end{vmatrix}$$

où nous avons écrit $1-u_1-u_2-\dots-u_{s-1}=u_s$. D'après ce qui précède on aura $u_s>0$. Finalement on trouve

$$\mathfrak{D}_{s-1}=u_1u_2\dots u_s\gamma^{s-1}.$$

D'après la formule (10) la constante C sera égale à

$$C=\frac{1}{\omega^{s-1}\sqrt{(2\pi\gamma)^{s-1}u_1u_2\dots u_s}}. \tag{12}$$

Pour obtenir le mineur A_{ii} remarquons que cette quantité est égale au déterminant $(\mu_{11}\mu_{22}\dots\mu_{s-1,s-1})$ dans lequel on a supprimé la ligne et la colonne i. On aura donc

$$A_{ii}=\frac{u_1\dots u_{s-1}}{u_i}\gamma^{s-2}\begin{vmatrix} 1-u_1 & -u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ -u_1 & 1-u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ \dots & & \dots & \dots \\ -u_1 & -u_2 & \dots & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

En procédant comme ci-dessus, on trouve

$$A_{ii}=\frac{u_1\dots u_{s-1}}{u_i}\gamma^{s-2}(u_i+u_s),$$

on en conclut d'après la formule (8)

$$a_{ii}=\frac{(u_i+u_s)}{2\gamma u_i u_s}. \tag{13}$$

Comme A_{ij} est égal au déterminant obtenu de $(\mu_{11}\dots\mu_{s-1,s-1})$ en y supprimant la ligne i et la colonne j, puis en multipliant le résultat par $(-1)^{i+j}$, on aura

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\frac{u_1\dots u_{s-1}}{u_i}\gamma^{s-2}\begin{vmatrix} 1-u_1 & -u_2 & \dots & -u_{s-1} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -u_1 & -u_2 & \dots & 1-u_{s-1} \end{vmatrix}.$$

La ligne i étant supprimée dans le déterminant du second membre, il suit que la colonne i ne contient que des nombres $-u_i$. En plaçant cette colonne à la fin, et en retranchant de chaque ligne la suivante, on trouve

$$A_{ij}=(-1)^{i+j+s-1-i-1}\frac{u_1\dots u_{s-1}}{u_i}\gamma^{s-2}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \dots & -u_{s-2} & 1-u_{s-1} & -u_i \end{vmatrix}.$$

Le déterminant du second membre est égal à $(-1)^{s-1-j+1}u_i$, en effet les nombres dans la diagonale sont négatifs depuis la colonne j. Finalement on a

$$A_{ij}=u_1u_2\dots u_{s-1}\gamma^{s-2}.$$

De la formule (8) il suit

$$a_{ij}=\frac{1}{2\gamma u_s}\qquad \text{lorsque}\qquad i\neq j. \tag{14}$$

On en conclut que dans le cas particulier considéré les coefficients a_{ij} sont indépendants de i et de j. C'est une grande simplification, car dans ce cas la forme quadratique figurant dans la formule (1) peut être écrite de la manière suivante

$$\sum\sum a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j=\sum_{i=1}^{s-1}\frac{u_i+u_s}{2\gamma u_i u_s}\varepsilon_i^2+\frac{1}{2\gamma u_s}\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon_i\varepsilon_j;$$

dans la seconde somme i doit être différente de j. Introduisons

$$\varepsilon_s=-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\dots-\varepsilon_{s-1},$$

on en tire

$$\Sigma\Sigma\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_s^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \ldots - \varepsilon_{s-1}^2.$$

A l'aide de cette valeur, la forme quadratique considérée devient

$$\sum_{i=1}^{s-1}\left[\frac{u_i+u_s}{2\gamma u_i u_s} - \frac{1}{2\gamma u_s}\right]\varepsilon_i^2 + \frac{\varepsilon_s^2}{2\gamma u_s};$$

en simplifiant on trouve

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\frac{\varepsilon_i^2}{\gamma u_i}. \tag{15}$$

Dans les paragraphes suivants nous allons donner quelques exemples.

§ 6. Application à la formule de Bernoulli à $s-1$ **variables indépendantes.** Soit

$$\bar{P} = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_s!}\,p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_s^{x_s}; \tag{16}$$

il s'agit de déterminer la formule approchée de $\bar{P}$ à l'aide de la formule (1). Pour commencer il faut déterminer les moments de $\bar{P}$ relatifs aux variables x_i; on y arrive à l'aide de la fonction génératrice de $\bar{P}$. Cette fonction est évidemment

$$U(t_1, t_2, \ldots, t_{s-1}) = (p_1t_1 + p_2t_2 + \ldots + p_{s-1}t_{s-1} + p_s)^n. \tag{17}$$

En effet dans le développement de U, le coefficient de $t_1^{x_1}t_2^{x_2}\ldots t_{s-1}^{x_{s-1}}$ est égale à $\bar{P}$.

On sait que

$$M_i = \Sigma x_i\bar{P} = \left[\frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1}.$$

De (17) on tire $M_i = np_i$. Nous pouvons maintenant definir les écarts par

$$\varepsilon_i = \frac{x_i}{n} - p_i.$$

(Ici on a posé $\omega = n$.)

De plus on a

$$M_{ij} = \Sigma x_i x_j\bar{P} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i\,\partial t_j}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1}$$

et

$$M_{ii} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i^2} + \frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1}.$$

La formule (17) donne

$$M_{ij}=n(n-1)p_i p_j \quad \text{et} \quad M_{ii}=n(n-1)p_i^2+np_i.$$

Finalement les moments des écarts ε_i sont tirés de la formule (3)

$$\mu_{ij}=\frac{1}{\omega^2}[M_{ij}-M_iM_j]=-\frac{1}{n}p_ip_j,$$

$$\mu_{ii}=\frac{1}{\omega^2}[M_{ii}-M_{ii}^2]=\frac{1}{n}p_i(1-p_i).$$

On voit que μ_{ii} et μ_{ij} sont de la forme $\gamma u_i(1-u_i)$ et $-\gamma u_i u_j$; on peut donc employer les formules du cas particulier considéré au § 5. En posant $u_i=p_i$ et $\gamma=1/n$ on obtient

$$C=\frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-1}p_1p_2\ldots p_s}}$$

et

$$\chi^2=n\sum_{i=1}^{s}\frac{\varepsilon_i^2}{p_i}.$$

Ainsi la formule approchée est complètement déterminée.

§ 7. Application à l'Inversion du Théorème de Bernoulli à $s-1$ variables indépendantes. Lorsque les probabilités p_i figurant dans la formule (16) sont inconnues, et qu'on a obtenu en n épreuves les fréquences $x_1, x_2, \ldots, x_s$, on cherche à déterminer la probabilité du système de valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_s$, c'est-à-dire la probabilité pour que les probabilités des événements simples soient respectivement comprises entre $p_i \pm \frac{1}{2}\,dp_i$. Désignons cette probabilité par $\mathfrak{F}dp_1dp_2\ldots dp_s$.

Il faut remarquer qu'il est impossible de résoudre ce problème sans avoir recours à certaines hypothèses concernant les probabilités à priori du système $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

On procédera de la manière suivante: En supposant que les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_s$ étaient connues, on détermine à l'aide de (16) la probabilité de l'événement réellement observé $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Plus cette probabilité est grande, plus on considère le système $p_1, p_2, \ldots, p_s$ comme probable. A défaut d'autres indications concernant ces probabilités, on admettra que $\mathfrak{F}$ est simplement proportionnel à (16). C'est équivalent au théorème de Bayes combiné avec l'hypothèse de Poisson d'après laquelle tous les systèmes sont également probables à priori.

On aura donc

$$\overline{\mathfrak{P}}dp_1dp_2\dots dp_{s-1} = \lambda_1\overline{P}\,dp_1\dots dp_{s-1} = \lambda p_1^{x_1}p_2^{x_2}\dots p_s^{x_s}\,dp_1\dots dp_{s-1}.$$

En vue de la détermination du facteur λ, observons que l'on doit avoir

$$(18) \qquad \int_0^1\dots\int_0^1 \overline{\mathfrak{P}}\,dp_1\dots dp_{s-1} = 1\,;$$

on en tire

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^1\dots\int_0^1 p_1^{x_1}\dots p_{s-1}^{x_{s-1}}(1-p_1-\dots-p_{s-1})^{x_s}dp_1\dots dp_{s-1}$$

mais l'intégrale du second membre est l'intégrale de DIRICHLET, qui est égale à

$$\frac{\Gamma(x_1+1)\dots\Gamma(x_s+1)}{\Gamma(n+s)} = \frac{x_1!\dots x_s!}{(n+s-1)!}.$$

La probabilité $\overline{\mathfrak{P}}$ peut donc s'écrire

$$(19) \qquad \overline{\mathfrak{P}}dp_1\dots dp_{s-1} = \frac{(n+s-1)!}{x_1!\dots x_s!}\,p_1^{x_1}\dots p_s^{x_s}\,dp_1\dots dp_{s-1}.$$

C'est la probabilité pour que les probabilités inconnues soient respectivement comprises dans les limites $p_i \pm \frac{1}{2}dp_i$.

Pour obtenir la formule approchée, il faut tout d'abord déterminer les moments de $\overline{\mathfrak{P}}$ relatifs aux p_i. On aura

$$M_i = \int_0^\infty\dots\int_0^\infty p_i\overline{\mathfrak{P}}dp_1dp_2\dots dp_{s-1}\,;$$

on peut mettre cette expression sous la forme

$$M_i = \frac{x_i+1}{n+s}\int_0^\infty\dots\int_0^\infty\frac{(n+s)!}{x_1!\dots(x_i+1)!\dots x_s!}\,p_1^{x_1}\dots p_i^{x_i+1}\dots p_s^{x_s}dp_1\dots dp_{s-1}.$$

De (18) et de (19) il suit que l'intégrale multiple précédente est égale à l'unité, et l'on a

$$M_i = \frac{x_i+1}{n+s}$$

Nous définirons les écarts par

$$\varepsilon_i = p_i - \frac{x_i+1}{n+s}.$$

(Ici nous avons posé $\omega = 1$.)

On déterminera de la même manière

$$M_{ij} = \frac{(x_i+1)(x_j+1)}{(n+s)(n+s+1)}, \qquad M_{ii} = \frac{(x_i+1)(x_i+2)}{(n+s)(n+s+1)}$$

ce qui donne pour les moments des écarts

$$\mu_{ii} = M_{ii} - M_i^2 = \frac{(x_i+1)(n+s-x_i-1)}{(n+s)^2(n+s+1)}$$

et

$$\mu_{ij} = M_{ij} - M_i M_j = -\frac{(x_i+1)(x_j+1)}{(n+s)^2(n+s+1)}.$$

On voit que ces moments rentrent dans le cas particulier du § 5. Pour obtenir la formule approchée, il suffit donc de poser dans les formules de ce paragraphe

$$u_i = \frac{x_i+1}{n+s} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{n+s+1}.$$

On en conclut que pour avoir la valeur approchée de la probabilité $\overline{\mathfrak{P}}$, il suffit de poser dans la formule

$$\mathfrak{P} = Ce^{-\chi^2} dp_1 \ldots dp_{s-1}$$

les valeurs suivantes

$$C = \sqrt{\frac{(n+s+1)^{s-1}(n+s)^s}{(2\pi)^{s-1}(x_1+1)\ldots(x_s+1)}}$$

et

$$\chi^2 = (n+s+1)(n+s) \sum_{i=1}^{s} \frac{\varepsilon_i^2}{x_i+1}.$$

§ 8. Application aux probabilités hypergéométriques. Une urne contient m boules marquées $1, 2, \ldots, s$, le nombre des boules marquées i étant b_i; on tire de l'urne à la fois n boules et on demande la probabilité pour que parmi les boules tirées il y ait x_1 boules marquées 1, x_2 marquées 2, et ainsi de suite x_s marquées s. On a

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_s = m \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_s = n$$

et la probabilité cherchée est

$$\overline{P} = \frac{\binom{b_1}{x_1}\binom{b_2}{x_2}\ldots\binom{b_s}{x_s}}{\binom{m}{n}}. \tag{20}$$

On a montré ailleurs que la fonction génératrice de cette probabilité est une fonction hypergéométrique à $s-1$ variables, ce qui a permis de déterminer les moments de $\bar{P}$.[2]) On a

$$M_i = \Sigma \ldots \Sigma x_i \bar{P} = \frac{n b_i}{m}.$$

On définira les écarts par $(\omega = n)$

$$\varepsilon_i = \frac{x_i}{n} - \frac{b_i}{m}.$$

De plus on a

$$M_{ii} = \Sigma \ldots \Sigma x_i^2 \bar{P} = \frac{n(n-1)}{m(m-1)} b_i(b_i - 1) + \frac{n b_i}{m},$$

$$M_{ij} = \Sigma \ldots \Sigma x_i x_j \bar{P} = \frac{n(n-1)}{m(m-1)} b_i b_j.$$

De ces valeurs, on déduit

$$\mu_{ii} = \Sigma \ldots \Sigma \varepsilon_i^2 \bar{P} = \frac{1}{n^2}(M_{ii} - M_i^2) = \frac{(m-n)\, b_i(m-b_i)}{n(m-1)\, m^2},$$

$$\mu_{ij} = \Sigma \ldots \Sigma \varepsilon_i \varepsilon_j \bar{P} = \frac{1}{n^2}(M_{ij} - M_i M_j) = -\frac{(m-n)\, b_i b_j}{n(m-1)\, m^2}.$$

On constate que ce problème rentre aussi dans la catégorie des problèmes du § 6, et pour obtenir l'approximation par la formule (1), il suffit de poser dans les formules du paragraphe 6

$$u_i = \frac{b_i}{m} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{(m-n)}{n(m-1)};$$

il en résulte

$$C = \sqrt{\left[\frac{m(m-1)}{2\pi n(m-n)}\right]^{s-1} \frac{m}{b_1 b_2 \ldots b_s}},$$

$$\chi^2 = \frac{n m(m-1)}{m-n} \sum_{i=1}^{s} \frac{\varepsilon_i^2}{b_i}.$$

§ 9. Application à l'inversion de la formule (20). D'une urne contenant m boules marquées $1, 2, \ldots, s$, dans des proportions inconnues, on a tiré n boules et on a trouvé x_i boules marquées i, pour $i = 1, 2, 3, \ldots, s$;

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = n.$$

On demande la probabilité $\bar{\mathcal{P}}$ pour qu'il y ait eu dans l'urne avant le tirage b_i boules marquées i pour $i = 1, 2, \ldots, s$ avec

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_s = m.$$

[2]) Ch. Jordan, Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées, *ces Acta,* **3** (1926), pp. 193—210.

Il est évident que pour pouvoir résoudre ce problème il faut avoir recours à une hypothèse. Si les nombres inconnus étaient égaux à $b_1, b_2, \ldots, b_s$, la probabilité d'obtenir le résultat réellement observé serait donné par la formule (20); plus cette probabilité est grande, plus le système $b_1, b_2, \ldots, b_s$ est probable. Lorsque nous n'avons aucune indication concernant la probabilité $\overline{\mathfrak{P}}$, nous admettrons qu'elle est simplement proportionnelle à la probabilité (20) (c'est, comme nous avons remarqué équivalent au théorème de BAYES combiné avec l'hypothèse de POISSON):

$$\overline{\mathfrak{P}}(b_1, \ldots, b_s) = \lambda \binom{b_1}{x_1}\binom{b_2}{x_2} \cdots \binom{b_s}{x_s}.$$

Pour déterminer λ, remarquons que l'on doit avoir $\Sigma \ldots \Sigma \overline{\mathfrak{P}} = 1$; il en résulte

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{b_1} \cdots \sum_{b_{s-1}} \binom{b_1}{x_1} \cdots \binom{b_s}{x_s} = \binom{m+s-1}{n+s-1}.$$

Par suite

$$\overline{\mathfrak{P}}(b_1, b_2, \ldots, b_s) = \frac{\binom{b_1}{x_1} \cdots \binom{b_s}{x_s}}{\binom{m+s-1}{n+s-1}}.$$

Pour déterminer les moments de $\overline{\mathfrak{P}}$ relatif à b_i, écrivons

$$M_i = \Sigma \ldots \Sigma b_i \overline{\mathfrak{P}} =$$

$$= \frac{(x_i+1)(m+s)}{n+s} \sum \cdots \sum \frac{\binom{b_1}{x_1} \cdots \binom{b_i+1}{x_i+1} \cdots \binom{b_s}{x_s}}{\binom{m+s}{n+s}} - \Sigma \ldots \Sigma \overline{\mathfrak{P}}$$

ce qui donne

$$M_i = \frac{(x_i+1)(m+s)}{n+s} - 1.$$

Définissons maintenant les écarts par

$$\varepsilon_i = \frac{1}{m}\left[b_i - \frac{(x_i+1)(m+s)}{n+s} + 1\right]$$

(ici nous avons posé $\omega = m$).

Les autres moments sont déduits de la même manière, et on trouve pour $i \neq j$

$$M_{ij} = \Sigma \ldots \Sigma b_i b_j \overline{\mathfrak{P}} = \Sigma \ldots \Sigma [(b_i+1)(b_j+1)\overline{\mathfrak{P}} - b_i \overline{\mathfrak{P}} - b_j \overline{\mathfrak{P}} - \overline{\mathfrak{P}}]$$

ce qui donne pour $i \neq j$

$$M_{ij}=\frac{(m+s)(m+s+1)(x_i+1)(x_j+1)}{(n+s)(n+s+1)}-M_i-M_j-1$$

de plus on a

$$M_{ii}=\Sigma\ldots\Sigma b_i^2\mathfrak{P}=\Sigma\ldots\Sigma[(b_i+1)(b_i+2)\mathfrak{P}-3(b_i+1)\mathfrak{P}+\mathfrak{P}];$$

c'est-à-dire

$$M_{ii}=\frac{(m+s)(m+s+1)(x_i+1)(x_i+2)}{(n+s)(n+s+1)}-\frac{3(x_i+1)(m+s)}{n+s}+1.$$

De ces valeurs on déduit pour $i\neq j$

$$\mu_{ij}=\frac{M_{ij}-M_iM_j}{m^2}=-\frac{(m+s)(m-n)(x_i+1)(x_j+1)}{m^2(n+s+1)(n+s)^2},$$

de même

$$\mu_{ii}=\frac{M_{ii}-M_i^2}{m^2}=\frac{(m+s)(m-n)(x_i+1)(n+s-x_i-1)}{m^2(n+s+1)(n+s)^2}.$$

Pour obtenir la formule approchée (1), remarquons que ces moments rentrent dans le cas particulier traité au § 5, on posera donc dans les formules de ce paragraphe

$$u_i=\frac{x_i+1}{n+s}\quad\text{et}\quad\gamma=\frac{(m+s)(m-n)}{(n+s+1)m^2};$$

on trouvera alors

$$C=\sqrt{\left[\frac{(n+s+1)}{2\pi(m+s)(m-n)}\right]^{s-1}\frac{(n+s)^s}{(x_1+1)\ldots(x_s+1)}}$$

et

$$\chi^2=\frac{(n+s)(n+s+1)m^2}{(m+s)(m-n)}\sum_{i=1}^{s}\frac{\varepsilon_i^2}{x_i+1}.$$

§ 10. Application à l'inversion de la formule (20) dans le cas de l'hypothèse de Boole. Même problème qu'au paragraphe précédent, mais nous avons des raisons pour supposer que les m boules placées dans l'urne en question ont été tirées d'une autre urne contenant une infinité de boules marquées $1, 2, \ldots, s$; la probabilité de tirer de cette urne une boule marquée i étant égale à $1/s$ pour toutes les valeurs de i.

Alors l'égalité des fréquences est la plus probable, et la probabilité a priori du système $b_1, b_2, \ldots, b_s$ est

$$\frac{m!}{b_1!\,b_2!\ldots b_s!}\,\frac{1}{s^m}.$$

C'est dans ce cas que les statisticiens disent que les urnes possibles sont distribuées normalement.

Dans l'hypothèse de BOOLE, on supposera après le tirage des n boules, que la probabilité $\overline{\mathfrak{P}}$ du système $b_1, b_2, \ldots, b_s$ est proportionnelle d'une part à l'expression précedente et d'autre part à la probabilité (20). On peut donc écrire

$$\overline{\mathfrak{P}} = \frac{\lambda_1}{b_1! \ldots b_s!} \binom{b_1}{x_1} \cdots \binom{b_s}{x_s}.$$

Pour déterminer la constante λ_1 et les moments de la fonction, notons que la fonction génératrice de $\overline{\mathfrak{P}}$ est évidemment égale à

$$U = \frac{\lambda_1}{x_1! \ldots x_s! \, (m-n)!} (1 + t_1 + t_2 + \ldots + t_{s-1})^{m-n} t_1^{x_1} t_2^{x_2} \ldots t_{s-1}^{x_{s-1}};$$

en effet, dans le développement de U le coefficient de $t_1^{b_1} \ldots t_{s-1}^{b_{s-1}}$ est égal à $\overline{\mathfrak{P}}$.

Comme on doit avoir $[U]_{t_1=t_2=\ldots=1} = 1$ il s'ensuit

$$\lambda_1 = \frac{(m-n)!}{s^{m-n}} x_1! \ldots x_s!$$

et

$$\overline{\mathfrak{P}} = \frac{(m-n)!}{(b_1-x_1)!\,(b_2-x_2)! \ldots (b_s-x_s)!\, s^{m-n}}.$$

On obtiendra les moments

$$M_i = \left[\frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1} = \frac{m-n}{s} + x_i.$$

Définissons les écarts par

$$\varepsilon_i = \frac{b_i}{m} - \frac{m-n}{ms} - \frac{x_i}{m}$$

(où l'on a posé $\omega = m$). On aura

$$M_{ii} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i^2} + \frac{\partial U}{\partial t_i}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1} = \frac{(m-n)(m-n-1)}{s^2} + \\ + \frac{(m-n)(2x_i+1)}{s} + x_i^2$$

et

$$M_{ij} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t_i \partial t_j}\right]_{t_1=t_2=\ldots=1} = \frac{(m-n)(m-n-1)}{s^2} + \\ + \frac{(m-n)(x_i+x_j)}{s} + x_i x_j.$$

On en déduit

$$\mu_{ii} = \frac{M_{ii} - M_i^2}{m^2} = \frac{(m-n)(s-1)}{m^2 s^2}$$

et, pour $i \neq j$

$$\mu_{ij} = \frac{M_{ij} - M_i M_j}{m^2} = -\frac{m-n}{m^2 s^2}.$$

Remarquons que μ_{ii} et μ_{ij} sont indépendantes de i et de j, de plus qu'on les obtient en posant dans les formules du § 5

$$u_i = \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{m-n}{m^2};$$

on trouve finalement

$$C = \sqrt{\left[\frac{s}{2\pi(m-n)}\right]^{s-1} s}$$

et

$$\chi^2 = \frac{m^2 s}{m-n} \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i^2.$$

(Reçu le 11 septembre 1936)